Olimpiada Naţională de Matematică 2019

Etapa locală – Iaşi, 15 februarie 2019

CLASA a IX-a

Barem de corectare

Problema 1.
Fie triunghiul ABC și punctele $M \in (AB), N \in (AC)$ astfel încât $BM = CN = x$. Fie E și F mijloacele segmentelor $[MN]$ și $[BC]$, iar $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC.

a) Exprimați vectorul $\overrightarrow{AD}$ în funcție de $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$.
b) Demonstrați că $EF \parallel AD$.

***Soluție și barem*:**
a) Dacă $BC = a, AB = c, AC = b$, avem:

$[AD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC \Rightarrow \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{c}{b} \Rightarrow BD = \dfrac{ac}{b+c}$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{1}{a} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{b+c}\left(b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AB} - c \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC}\right) =$$

$$= \frac{1}{b+c}\left(b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{1}{b+c}\left(b \cdot \overrightarrow{BA} + c \cdot \overrightarrow{CA}\right) (1)$$

……………………………………………………..2p

b) $\overrightarrow{FE} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{FN} + \overrightarrow{FM}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BM}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{BM}\right)$

Cu notațiile punctului *a*) obținem: $\overrightarrow{CN} = \dfrac{x}{b} \cdot \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BM} = \dfrac{x}{c} \cdot \overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{FE} = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{b}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{c}\overrightarrow{BA}\right) = \frac{x}{2bc}\left(c \cdot \overrightarrow{CA} + b \cdot \overrightarrow{BA}\right) (2)$$

………………………………………………………2p

Folosind relațiile (1) și (2), obținem:

$\overrightarrow{FE} = \dfrac{x}{2bc} \cdot \vec{u}, \overrightarrow{AD} = -\dfrac{1}{b+c} \cdot \vec{u}$, unde $\vec{u} = b \cdot \overrightarrow{BA} + c \cdot \overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{EF} = \dfrac{x(b+c)}{2bc} \cdot \overrightarrow{AD} \Rightarrow EF \parallel AD$ ……………3p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Problema 2.

a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $2016\cdot\{x\}+2017\cdot[x]-2018\cdot x+2019=0$

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\left[x+|x|\right]=\left|x+[x]\right|$.

***Soluție și barem*:**

a) Ținând cont că $x=[x]+\{x\}$ relația din enunț devine $[x]-2x+2019=0$ 1p

Cum $[x]+2019\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2x\in\mathbb{Z}\Rightarrow\{x\}\in\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$ 1p

Dacă $\{x\}=0\Rightarrow[x]=x\Rightarrow x=2019$ 1p

Dacă $\{x\}=\frac{1}{2}\Rightarrow[x]-2\left([x]+\frac{1}{2}\right)+2019=0\Rightarrow[x]=2018\Rightarrow x=2018,5$

Finalizare $x\in\{2018,5;\ 2019\}$ 1p

b) Știm că $|x|=\begin{cases}x, \textit{dacă } x\geq 0\\ -x, \textit{dacă } x<0\end{cases}$

Dacă $x<0$ atunci $x+[x]=0$ și atunci relația din ipoteză devine $[0]=\left|x+[x]\right|$,

de unde $x+[x]=0\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$ și de aici $2\cdot x=0\Rightarrow x=0$, fals. 1p

Dacă $x\geq 0$, atunci $x+|x|=2x$ și $\left|x+[x]\right|=x+[x]$, iar relația din ipoteză devine $[2x]=x+[x]$, ... 1p

de unde obținem $x\in\mathbb{Z}$ și $2x=x+x$, adevărat.
Cum $x\in\mathbb{Z}$ și $x\geq 0$ va rezulta că $x\in\mathbb{N}$.
Finalizare $x\in\mathbb{N}$ 1p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Problema 3.

a) Să se arate că $xy+yz+zx \le \frac{(x+y+z)^2}{3}, (\forall)x,y,z \in \mathbb{R}$

b) Fie *a*, *b*, *c*, *d*> 0 numere reale. Demonstrați că

$$\frac{a}{\sqrt{bc+cd+db}}+\frac{b}{\sqrt{ac+cd+da}}+\frac{c}{\sqrt{ab+bd+da}}+\frac{d}{\sqrt{ab+bc+ca}} \ge \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Soluție și barem:

a) Relația din ipoteză se mai poate scrie succesiv sub forma:

$3xy+3yz+3zx \le x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx \Leftrightarrow$ 1p

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx \ge 0 \Leftrightarrow$ 1p

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \ge 0$, adevărat 1p

Cu egalitate pentru $x=y=z$.

b) Folosind punctul a) obținem că $\sqrt{bc+cd+db} \le \frac{b+c+d}{\sqrt{3}}$, de unde $\frac{a}{\sqrt{bc+cd+db}} \ge \frac{a\sqrt{3}}{b+c+d}$ 1p

Scriind și celelalte trei relații și însumându-le pe toate patru obținem:

$$\frac{a}{\sqrt{bc+cd+db}}+\frac{b}{\sqrt{ac+cd+da}}+\frac{c}{\sqrt{ab+bd+da}}+\frac{d}{\sqrt{ab+bc+ca}} \ge$$

$\ge \frac{a\sqrt{3}}{b+c+d}+\frac{b\sqrt{3}}{a+c+d}+\frac{c\sqrt{3}}{a+b+d}+\frac{d\sqrt{3}}{a+b+c}$ 1p

Dacă vom arăta că $\frac{a\sqrt{3}}{b+c+d}+\frac{b\sqrt{3}}{a+c+d}+\frac{c\sqrt{3}}{a+b+d}+\frac{d\sqrt{3}}{a+b+c} \ge \frac{4\sqrt{3}}{3}$, problema este rezolvată.

În inegalitatea $\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c} \ge \frac{4}{3}$,

notăm cu $b+c+d=x, a+c+d=y, a+b+d=z, a+b+c=t$.

Obținem că $a=\frac{y+z+t-2x}{3}, b=\frac{x+z+t-2y}{3}, c=\frac{x+y+t-2z}{3}, d=\frac{x+y+z-2t}{3}$.

Inegalitatea se mai poate scrie sub forma:

$\frac{y+z+t-2x}{3x}+\frac{x+z+t-2y}{3y}+\frac{x+y+t-2z}{3z}+\frac{x+y+z-2t}{3t} \ge \frac{4}{3} \Leftrightarrow$ 1p

$\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{t}+\frac{t}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{y}{t}+\frac{t}{y}\right)+\left(\frac{z}{t}+\frac{t}{z}\right) \ge 12$, adevărat deoarece fiecare paranteză este mai mare sau egală cu 2. .... 1p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Egalitatea se atinge când inegalitățile intermediare devin egalități, adică pentru $x = y = z = t$ care conduce la $a = b = c = d$.

Problema 4.

Fie triunghiul ABC cu $AB \neq 3AC, D \in (BC)$ astfel încât $BD = 3DC$, I centrul cercului înscris în triunghiul $ABC, DI \cap AB = \{E\}, AD \cap EC = \{F\}$.

Calculați raportul $\frac{FC}{FE}$ în funcție de lungimile laturilor triunghiului ABC.

***Soluție și barem*:**

Fie $AB = c, BC = a, AC = b$

În triunghiul EBC, transversala AD ($A - F - D$) aplicăm teorema lui Menelaus, avem:

$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{FC}{FE} \cdot \frac{AE}{AB} = 1 \Rightarrow \frac{FC}{FE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AE}{AB}$ (1) 2p

Fie $\frac{AE}{AB} = k,$ avem $\overrightarrow{DE} = (1-k)\overrightarrow{DA} + k \cdot \overrightarrow{DB},$ ținând cont că $\overrightarrow{r_D} = \frac{1}{4}\overrightarrow{r_B} + \frac{3}{4}\overrightarrow{r_C}$, găsim:

$\overrightarrow{DE} = (1-k)\overrightarrow{r_A} + \frac{4 \cdot k - 1}{4}\overrightarrow{r_B} - \frac{3}{4}\overrightarrow{r_C}$ 1p

Calculăm $\overrightarrow{DI}$, avem:

$\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{r_I} - \overrightarrow{r_D} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{r_A} + \left(\frac{b}{a+b+c} - \frac{1}{4}\right)\overrightarrow{r_B} + \left(\frac{c}{a+b+c} - \frac{3}{4}\right)\overrightarrow{r_C}$ 1p

$\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DI}$ vectori coliniari $\Rightarrow \frac{(1-k)(a+b+c)}{a} = \frac{4k-1}{4} \cdot \frac{4(a+b+c)}{3b-a-c} \Rightarrow k = \frac{3b-c}{3a+3b-c}$ (2) 2p

Finalizare, din (1) și (2) obținem:

$\frac{FC}{FE} = \frac{3b-c}{3(3a+3b-c)}$ 1p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro