Olimpiada Naţională de Matematică 2019

Etapa locală – Iaşi, 15 februarie 2019

CLASA a XI-a

Barem de corectare

Problema 1.

Fie două matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea:

$$AB = \begin{pmatrix} 2018 & 2019 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determinați matricea B, știind că $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Demonstrați că matricea BA este inversabilă și $BA - (BA)^{-1} = 2019 \cdot I_2$.

Soluție.

a) Deoarece matricea A este inversabilă și $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, rezultă că $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2018 & 2019 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2017 & 2018 \\ -4033 & -4035 \end{pmatrix}$. **(3p)**

b) Cum $\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB) = -1 \neq 0$, înseamnă că matricele A, B și BA sunt inversabile. Așadar, avem:

$$BA - (BA)^{-1} = 2019 \cdot I_2 \Leftrightarrow BA - A^{-1}B^{-1} = 2019 \cdot I_2 \Leftrightarrow BAB - A^{-1} = 2019 \cdot B \Leftrightarrow ABAB - I_2 =$$
$$2019 \cdot AB \Leftrightarrow (AB)^2 - 2019 \cdot AB - I_2 = O_2 \Leftrightarrow (AB)^2 - \mathrm{tr}(AB) \cdot AB + \det(AB) I_2 = O_2.$$

Ultima egalitate este relația Cayley-Hamilton pentru matricea AB, deci este adevărată. **(4p)**

Problema 2.

Fie M mulțimea tuturor matricelor pătratice de ordinul trei cu elemente din mulțimea $\{-1, 1\}$
.

a) Determinați numărul elementelor mulțimii M.
b) Arătați că determinantul oricărei matrice din mulțimea M este un număr întreg, divizibil cu 4.
c) Aflați toate valorile pe care le poate avea determinantul unei matrice din mulțimea M.

Soluție.
a) Mulțimea M are $2^9 = 512$ elemente. **(2p)**

b) Fie A o matrice din mulțimea M. Dacă adunăm prima coloană a matricei A la a doua și la a treia coloană, atunci matricea obținută, B, are același determinant ca matricea A și elementele ultimelor două coloane ale sale aparțin mulțimii $\{-2,\ 0,\ 2\}$. Scoțând factor 2 de pe fiecare dintre ultimele două coloane, avem $\det(A)=\det(B)=4\det(C)$, unde C este o matrice pătratică de ordinul trei cu elementele numere întregi. Cum $\det(C)$ este un număr întreg, rezultă că $\det(A)$ este un număr întreg, divizibil cu 4. **(3p)**

c) Conform definiției, determinantul unei matrice din mulțimea M este egal cu suma a șase numere întregi având valoarea -1 sau $+1$. Este clar că valoarea unui astfel de determinant este un număr întreg egal cu cel puțin -6 și cel mult $+6$. Cum determinantul unei matrice din mulțimea M este multiplu de 4, el poate fi doar $-4,\ 0$ sau $+4$. Aceste valori pot fi atinse:

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=-4,\ \begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=+4.$$ **(2p)**

Problema 3.

Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit astfel: $x_1=1$ și $x_{n+1}=x_n\cdot e^{-x_n}$, oricare ar fi numărul natural $n\geq 1$.

a) Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent și determinați limita sa.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,x_n$.

Soluție.

a) Deoarece $x_n>0$, oricare ar fi $n\geq 1$, rezultă că $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=e^{-x_n}<1$, oricare ar fi $n\geq 1$, deci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. Așadar, conform teoremei lui Weierstrass, șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent (strict descrescător și mărginit inferior de 0). Fie $L=\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Trecând la limită în relația de recurență, obținem $L=L\cdot e^{-L}$, sau $L\cdot\left(1-e^{-L}\right)=0$, de unde deducem că $L=0$, deci $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$. **(4p)**

b) Avem $nx_n=\dfrac{n}{\frac{1}{x_n}}=\dfrac{a_n}{b_n}$, unde $a_n=n$ și $b_n=\dfrac{1}{x_n}$ $(n\geq 1)$. Șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător și are limita $+\infty$. Întrucât $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\dfrac{x_n\cdot x_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}=\dfrac{x_n^2\cdot e^{-x_n}}{x_n-x_n\cdot e^{-x_n}}=\dfrac{x_n\cdot e^{-x_n}}{1-e^{-x_n}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-x_n}=e^0=1$ și $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{1-e^{-x_n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-x_n}{e^{-x_n}-1}=1$, rezultă că $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=1$. Prin urmare, conform lemei Stolz-Cesaro, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,x_n=1$. **(3p)**

Problema 4.

Spunem că *f* este α *apropiată* de *g*, dacă *f* și *g* sunt două funcții definite pe același domeniu $D \subseteq \mathbb{R}$ cu valori în $\mathbb{R}$, $+\infty$ este punct de acumulare pentru D, $\alpha \in \mathbb{R}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\alpha g(x)\right)=0$.

a) Demonstrați că, dacă *f* este α *apropiată* de *g* și *g* este β *apropiată* de *h*, atunci *f* este $\alpha\beta$ *apropiată* de *h*.

b) Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^3-4x^2+1}{x^2+1}$ și $g(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}$. Demonstrați că *f* este 2 *apropiată* de *g*.

c) Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$ și $g(x)=\sqrt{x^2+1}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Determinați numerele *a* și *b*, știind că *f* este 3 *apropiată* de *g*.

Soluție.

a) Funcțiile *f*, *g* și *h* au același domeniu de definiție D, iar $+\infty$ este punct de acumulare pentru D. Cum

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\alpha\beta h(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\alpha g(x)+\alpha g(x)-\alpha\beta h(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\alpha g(x)\right)+$$

$$\alpha\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\beta h(x)\right)=0+\alpha\cdot 0=0,$$

rezultă că *f* este $\alpha\beta$ *apropiată* de *h*. **(2p)**

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2g(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^3-4x^2+1}{x^2+1}-2\cdot\dfrac{x^2-x}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-6x^2+3x+1}{\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)}=0.$ **(2p)**

Obs. Considerăm funcția $h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $h(x)=x-2$. Deoarece *f* este 2 *apropiată* de *h*, iar *h* este 1 *apropiată* de *g*, rezultă, conform subpunctului a), că *f* este 2 *apropiată* de *g*.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3g(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax+b-3\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(a+\dfrac{b}{x}-3\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)\neq 0$, dacă $a\neq 3$.

Pentru $a=3$, avem:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-3g(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(3x+b-3\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6bx+b^2-9}{3x+b+3\sqrt{x^2+1}}=b.$$

Prin urmare, *f* este 3 *apropiată* de *g* dacă $a=3$ și $b=0$. **(3p)**