Olimpiada Naţională de Matematică 2019

Etapa locală – Iaşi, 15 februarie 2019

CLASA a X a

Barem

Problema 1. Demonstrați că :

a) dacă $a,b\in\mathbb{N},\ 2\le a<b,$ încât $a+b=2019,$ atunci $\log_a b\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$;

b) dacă $a,b\in(0,1),$ distincte, cu $a+b$=1, atunci $a\ln a+b\ln b>\dfrac{\ln a+\ln b}{2}$.

Soluţie şi barem:

a) Prin reducere la absurd se presupune că $\log_a b\notin\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, atunci

$\log_a b\in Q_+\Rightarrow\exists m,n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\log_a b=\dfrac{m}{n}\Leftrightarrow b=a^{\frac{m}{n}}\Leftrightarrow b^n=a^m$ 2p

Cum a și b au parități diferite, a^m și b^n au parități diferite, rezultă contradicție, deci $\log_a b\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ ……………………………………………………………………..….1p

b) $a\ln a+b\ln b>\dfrac{\ln a+\ln b}{2}\Leftrightarrow(2a-1)\ln a+(2b-1)\ln b>0$……………..... …………………...1p

Cum a + b=1, $(2a-1)\ln a+(2b-1)\ln b>0\Leftrightarrow(2a-1)\ln a-(2a-1)\ln b>0$

$\Leftrightarrow(2a-1)\ln\dfrac{a}{b}>0$...1p

Dacă $0<a<\dfrac{1}{2}<b$, atunci $2a-1<0$ și $\ln\dfrac{a}{b}<0$, rezultă $(2a-1)\ln\dfrac{a}{b}>0$ adevărat...............1p

Dacă $0<b<\dfrac{1}{2}<a$, atunci $2a-1>0$ și $\ln\dfrac{a}{b}>0$, rezultă $(2a-1)\ln\dfrac{a}{b}>0$ adevărat...............1p

Problema 2.

a) Determinați numerele complexe z care au $|z|=1$ și $\left|z^2+\dfrac{1}{z^2}\right|=2$.

b) Se consideră numerele $z_1,z_2,z_3,z_4\in\mathbb{C}$, cu $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=a>0$. Dacă $z_1+z_2+z_3+z_4=0$, arătați că $|z-z_1|+|z-z_2|+|z-z_3|+|z-z_4|\ge 4a$, $\forall\ z\in\mathbb{R}$

Soluţie şi barem:

a) Fie $z=x+iy, x,y\in\mathbb{R}$.Deoarece $|z|=1\Rightarrow x^2+y^2=1$ şi $\frac{1}{z^2}=\left(\bar{z}\right)^2=x^2-2xyi-y^2$ ….1p

$\left|z^2+\frac{1}{z^2}\right|=2\Leftrightarrow\left|x^2+2xyi-y^2+x^2-2xyi-y^2\right|=2\Leftrightarrow\left|x^2-y^2\right|=1\Leftrightarrow x^2-y^2=\pm1$ …..1p

$\begin{cases}x^2+y^2=1\\x^2-y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm1\\y=0\end{cases}\Rightarrow z\in\{1,-1\}$ 1p

$\begin{cases}x^2+y^2=1\\x^2-y^2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=\pm1\end{cases}\Rightarrow z\in\{i,-i\}$ 1p

b) $|z_k|=a\Rightarrow|z-z_k|=\left|\overline{z-z_k}\right|=\left|z-\overline{z_k}\right|=\frac{\left|z-\overline{z_k}\right|\cdot|z_k|}{a}=\frac{\left|z\cdot z_k-\overline{z_k}\cdot z_k\right|}{a}=\frac{\left|z\cdot z_k-a^2\right|}{a}$ 2p

Cum $|A|+|B|+|C|+|D|\geq|A+B+C+D|,\forall A,B,C,D\in\mathbb{C}$, rezultă

$|z-z_1|+|z-z_2|+|z-z_3|+|z-z_4|=\frac{1}{a}\left(\left|z\cdot z_1-a^2\right|+\left|z\cdot z_2-a^2\right|+\left|z\cdot z_3-a^2\right|+\left|z\cdot z_4-a^2\right|\right)\geq$

$\geq\frac{\left|z\left(z_1+z_2+z_3+z_4\right)-4a^2\right|}{a}=\frac{4a^2}{a}=4a$ 1p

Problema 3.

a) Rezolvaţi ecuaţia $2019^{x-4}+2019^{\frac{16}{x}-4}=2$

b) Fie $x\in\mathbb{R}$ şi $a,b,c\in(0,\infty)$ astfel încât $a^x+b^x+c^x=a^{x+1}\cdot b^{x+1}\cdot c^{x+1}$.

Arătaţi că $a^{2x+3}+b^{2x+3}+c^{2x+3}\geq9$.

Soluţie şi barem:

a) Rescriem $2019^x+2019^{\frac{16}{x}}=2\cdot2019^4$

Dacă $x<0$ nu avem soluții……………………………………………………………..1p

Dacă $x>0$, $2019^x+2019^{\frac{16}{x}}\geq2\sqrt{2019^{x+\frac{16}{x}}}\geq2\sqrt{2019^{2\sqrt{x\cdot\frac{16}{x}}}}=2\sqrt{2019^8}=2\cdot2019^4$ ……….2p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Are loc egalitate dacă și numai dacă $x = \frac{16}{x} \Rightarrow x = 4$ soluție……………………………… …....1p

b) Din inegalitatea mediilor, $a^x + b^x + c^x \geq 3a^{\frac{x}{3}}b^{\frac{x}{3}}c^{\frac{x}{3}}$ ……………………..……………...1p

$a^{x+1} \cdot b^{x+1} \cdot c^{x+1} \geq 3a^{\frac{x}{3}}b^{\frac{x}{3}}c^{\frac{x}{3}}$, deci $a^{\frac{2x+3}{3}} \cdot b^{\frac{2x+3}{3}} \cdot c^{\frac{2x+3}{3}} \geq 3$………………………………1p

Tot din inegalitatea mediilor avem $a^{2x+3} + b^{2x+3} + c^{2x+3} \geq 3a^{\frac{2x+3}{3}} \cdot b^{\frac{2x+3}{3}} \cdot c^{\frac{2x+3}{3}} \geq 3 \cdot 3 = 9$………..1p

Problema 4.

a) Fie funcția $f:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, astfel încât $f(x) \cdot f(ix) = x^2, \forall x \in \mathbb{C}$. Demonstrați că f este impară

b) Fie funcția $f:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, astfel încât $f(x) + f(\varepsilon x) = x, \forall x \in \mathbb{C}$, ε fiind rădăcină cubică a unității, $\varepsilon \neq 1$. Determinați funcția f

Soluţie şi barem:

a) $i \to ix \Rightarrow f(ix) \cdot f(-x) = -x^2$ ………………………………………………………..…2p

$f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{C}$ ……………………………………………………………....1p

b) Transformăm $x \to \varepsilon x$ și $x \to \varepsilon^2 x$ și avem

$f(\varepsilon x) + f\left(\varepsilon^2 x\right) = \varepsilon x$ ……………………………………………………………………..1p

$f\left(\varepsilon^2 x\right) + f(x) = \varepsilon^2 x$ …………………………………………………………………..1p

Avem și $f(x) + f(\varepsilon x) = x, \forall x \in \mathbb{C}$, din enunț. Formăm un sistem cu necunoscutele

$y = f(x), z = f(\varepsilon x), t = f(\varepsilon^2 x)$. Rezolvând se obține $y = f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \varepsilon x + \varepsilon^2 x\right)$ …….1p

și având $1 + \varepsilon^2 = -\varepsilon \Rightarrow f(x) = -\varepsilon x$ ………………………………………….…………..1p

Notă: Orice altă soluţie corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.