Olimpiada Națională de Matematică 2019
Etapa locală – Iaşi, 15 februarie 2019

CLASA A XII-A

Problema 1.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=\int_{-1}^{1}\frac{x^{100}}{e^{tx}+1}\mathrm{d}x$. Trasați graficul funcției *f*.

Soluție şi barem

Considerăm funcția $g:[-1,1]\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{x^{100}}{e^{tx}+1}$. Avem: $\int_{-1}^{1}g(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}g(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}g(x)\mathrm{d}x=$

$=\int_{0}^{1}g(-x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}g(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\left(g(-x)+g(x)\right)\mathrm{d}x$. **(3p)**

Dar $g(-x)+g(x)=x^{100}\left(\frac{e^{tx}}{e^{tx}+1}+\frac{1}{e^{tx}+1}\right)=x^{100},\forall x\in[-1,1]$. **(2p)**

Astfel, $f(t)=\int_{0}^{1}x^{100}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{101},\forall t\in\mathbb{R}$. Graficul funcției *f* va fi o dreaptă orizontală. **(2p)**

Problema 2.

a) Fie G_1 şi G_2 două grupuri, cu elementele neutre e_1, respectiv e_2. Dacă funcția $f:G_1\to G_2$ are proprietatea că $f(xy)=f(x)\cdot f(y),\forall x,y\in G_1$, arătați că $f(e_1)=e_2$.

b) Rămâne adevărată concluzia dacă înlocuim grupurile G_1 şi G_2 cu monoizii M_1 şi M_2?

Soluție şi barem

a) În grupul G_2, avem: $f(e_1)\cdot f(e_1)=f(e_1\cdot e_1)=f(e_1)=f(e_1)\cdot e_2$. Prin simplificare la stânga cu $f(e_1)$, rezultă că $f(e_1)=e_2$. **(4p)**

b) Răspunsul este negativ. De exemplu, se verifică faptul că funcția $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})\to\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ definită prin $f\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a & b & 0\\ c & d & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ este morfism de monoizi multiplicativi, însă $f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, deci $f(I_2)\neq I_3$. **(3p)**

Problema 3.

Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $(x-1)f(x)=\ln x,\forall x\in(0,+\infty)$. Funcția *f* admite primitive, iar *F* este o primitivă a sa.

a) Calculați $f(1)$.

b) Arătați că există un număr real α astfel încât $\ln x < F(x) < x, \forall x \in (\alpha, +\infty)$.

Soluție și barem

a) Deoarece funcția f admite primitive, ea are proprietea lui Darboux, deci nu poate avea discontinuități de speța I. Pe de altă parte, f este continuă pe $(0,1) \cup (1,+\infty)$ și are limită finită în 1, anume $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \overset{\text{l'H}}{=} 1$. Rezultă că f este continuă în 1, iar $f(1)=1$. **(3p)**

b) Vom arăta că $\alpha = 1$ are proprietatea dorită. Considerăm funcția $g:(1,+\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = F(x) - \ln x$. Avem că $g'(x) = \frac{u(x)}{x(x-1)}, \forall x \in (1,+\infty)$, unde $u(x) = x\ln x - x + 1$. Cum $u'(x) = \ln x$, funcția u este crescătoare pe $(1,+\infty)$; în plus, $\lim\limits_{x \searrow 1} u(x) = 0$, deci $u(x) > 0, \forall x \in (1,+\infty)$. Atunci $g'(x) > 0, \forall x \in (1,+\infty)$, așadar g este crescătoare pe $(1,+\infty)$; în plus, $\lim\limits_{x\searrow 1} g(x) = 1$, prin urmare $g(x) > 0, \forall x \in (1,+\infty)$, de unde $\ln x < F(x), \forall x \in (1,+\infty)$. **(2p)**

Considerăm funcția $h:(1,+\infty) \to \mathbb{R}, h(x) = F(x) - x$. Avem că $h'(x) = \frac{v(x)}{x-1}, \forall x \in (1,+\infty)$, unde $v(x) = \ln x - x + 1$. Cum $v'(x) = \frac{1}{x} - 1$, funcția v este descrescătoare pe $(1,+\infty)$; în plus, $\lim\limits_{x\searrow 1} v(x) = 0$, deci $v(x) < 0, \forall x \in (1,+\infty)$. Atunci $h'(x) < 0, \forall x \in (1,+\infty)$, așadar h este descrescătoare pe $(1,+\infty)$; în plus, $\lim\limits_{x\searrow 1} h(x) = 0$, deci $h(x) < 0, \forall x \in (1,+\infty)$, de unde $F(x) < x$, $\forall x \in (1,+\infty)$. **(2p)**

Problema 4.

Determinați toate grupurile de ordin trei de forma $G = \{I_2, A, A^2\}$, unde $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$, iar operația este înmulțirea matricelor.

Soluție și barem

Evident, o matrice A care generează G este astfel încât $A \neq I_2, A^2 \neq I_2$ și $A^3 = I_2$. **(1p)**

Fie $t = \operatorname{tr} A$, $d = \det A$. Cum $d^3 = \hat{1}$, rezultă că $d = \hat{1}$. Apoi, cum A verifică propria ecuație caracteristică, avem că $A^2 = tA - I_2$, prin urmare $I_2 = A^3 = tA^2 - A = t(tA - I_2) - A$, de unde $(t+\hat{1})I_2 = (t^2 - \hat{1})A$. Singura valoare convenabilă pentru t este $t = \hat{2}$. **(3p)**

Matricele din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ cu $t = \hat{2}, d = \hat{1}$ sunt în număr de opt: $A_1 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $A_7 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $A_8 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$. Calculăm pătratul fiecăreia dintre aceste matrice și obținem că există patru grupuri care verifică cerințele problemei: $G_1 = \{I_2, A_1, A_8\}$, $G_2 = \{I_2, A_2, A_7\}$, $G_3 = \{I_2, A_3, A_6\}$, $G_4 = \{I_2, A_4, A_5\}$. **(3p)**

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se vor puncta corespunzător.